2) Modèle de la goutte liquide

Energie de liaison
$$B = \underbrace{a_1 A}_{\text{énergie volumique}} - \underbrace{a_2 A^{2/3}}_{\text{"non" liaison de surface}} - \underbrace{a_3 Z^2 A^{-1/3}}_{\text{coulombien}} - \underbrace{a_4 (A-2Z)^2 A^{-1}}_{\text{asymétrie proton/neutron}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1+(-1)^A)(-1)^Z a_5 A^{-3/4}}_{\text{parité}}$$
a_i positifs

1)

2) coefficient a_3

énergie potentielle d'interaction coulombienne ρ : densité volumique de charges

$$dE_p = \frac{(dq)\times(q)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(\rho dV)\times(\rho V)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho^2 V dV}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(4\pi r^2 dr)$$
$$= \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr$$

$$E_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^{R_0} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{R_0^5}{5} \quad \text{avec } \rho = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3}$$
R_0 rayon du noyau $R_0 = r_0 A^{1/3}$

soit $$E_p = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\times\left(\frac{9Z^2e^2}{16\pi^2 R_0^6}\right)\frac{R_0^5}{5} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0} Z^2 A^{-1/3} \Rightarrow a_3 = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

3) A impair.

terme de parité nul

Masse du noyau $\propto (a_1 A - B) = a_2 A^{2/3} + a_3 A^{-1/3} Z^2 + a_4 A^{-1}(A-2Z)^2$
$$= (a_3 A^{-1/3} + 4a_4 A^{-1})Z^2 - 4a_4 Z + (a_2 A^{2/3} + a_4 A)$$
eq d'une parabole

A pair $\begin{cases} Z \text{ pair} \\ Z \text{ impair}\end{cases}$ parité $\begin{cases} a_5 A^{-3/4} \\ -a_5 A^{-3/4}\end{cases}$ 2 paraboles

3) Production de ^{26}Al dans notre galaxie

Raie γ à 1,8 MeV ^{26}Al ($T_{1/2}$ = 1 million d'années)

$f_{\text{supernovae}} = 0{,}03$

$\phi_\gamma = 5\ 10^{-4}\ s^{-1}\ cm^{-2}$

$m_{Al\ \text{éjecté}} = 6\ 10^{-5} M_\odot$

1) Emission stationnaire

N : nbre de noyaux ^{26}Al

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{-\frac{N}{\tau}}_{\text{décroissance radioactive}} + \underbrace{Y}_{\text{terme source (production)} = \text{cste}}$$

Compte tenu des relations (7), (10) et (12) du problème précédent il faut donc que l'on ait simultanément :

$$ {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < 2\,m_ec^2 $$
$$ {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < B_K\,(Z-1) $$
$$ {}^{A}_{Z-1}Mc^2 - {}^{A}_{Z}Mc^2 < 0 $$

On en déduit la condition de stabilité des deux isobares adjacents :

$$ 0 < {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < B_K\,(Z-1) $$

REMARQUE : La condition précédente n'est jamais satisfaite et il n'existe pas deux isobares stables adjacents exception faite de la paire ${}^{113}_{48}Cd$, ${}^{113}_{49}In$ dont l'existence est attribuée à la grande différence de moment angulaire entre les deux noyaux.

3° On donne l'expression de la formule semi-empirique donnant la masse de l'atome neutre correspondant au noyau (A, Z) considéré dans l'état fondamental :

$$ {}^{A}_{Z}M = ZM_H + (A-Z)\,M_n - a_v\,A + a_s\,A^{2/3} + a_c\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a\,\frac{\left(\frac{A}{2}-Z\right)^2}{A} + \delta\,(A,Z) \qquad \text{(I)} $$

avec :

$$ \delta\,(A,Z) = \begin{cases} a_p\,A^{-3/4} & \textit{pour A pair et Z impair} \\ 0 & \textit{pour A impair} \\ -\,a_p\,A^{-3/4} & \textit{pour A pair et Z pair} \end{cases} $$

a_c, a_s, a_v, a_a, a_p *sont des constantes positives.*

M_H *et* M_n *désignent respectivement la masse de l'atome d'Hydrogène* ${}^{1}H$ *et la masse du neutron;* $(M_n - M_H)\,c^2 = 0{,}782$ MeV.

Dans cet exercice on se limité aux valeurs impaires de A.

a) *Montrer que pour une valeur fixée de A (impaire) la relation (I) est équivalente à*

$$ {}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z_o}M = a\,(Z-Z_o)^2 \qquad \text{(II)} $$

${}^{A}_{Z_o}M$ *désignant la masse d'un isobare fictif de charge* Z_o *non nécessairement égale à un entier et à une constante.*

b) ***En utilisant la relation (II) donner l'expression de l'énergie disponible pour une désintégration*** β^- ***à partir du noyau (A, Z). Quelle relation doit-il exister entre Z et*** Z_o ***pour que l'émission*** β^- ***soit énergétiquement possible ?***

c) *Déterminer les valeurs numériques de a et* Z_o *correspondant à A = 131 sachant que les énergies disponibles pour les désintégrations* β^- *de* ${}^{131}_{52}Te$ *et* ${}^{131}_{53}I$ *sont respectivement 2,28 et 0,97 MeV.*

d) ***Quelle relation approchée existe-t-il entre les nombres A et Z pour les noyaux stables de A impair ? En déduire une valeur approchée du rapport N/Z pour les noyaux lourds stables (N : nombre de neutrons).***

On donne les équivalents énergétiques des coefficients a_a *et* a_c *:*

$$ a_a = 77{,}286 \text{ MeV}; \quad a_c = 0{,}584 \text{ MeV} $$

RÉPONSE. — ***a)*** Pour une valeur fixée impaire de A on a $\delta\,(A,Z) = 0$ et la relation (I) est de la forme :

$$ {}^{A}_{Z}M = \alpha\,Z^2 + \beta\,Z + \gamma \qquad \text{(a)} $$

avec :

$$ \alpha = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{a_a}{A} \qquad \text{(b)} $$

Le coefficient α étant positif, la parabole (a) admet un minimum. En notant ${}^{A}_{Z_o}M$ et Z_o les coordonnées de ce minimum, on peut encore écrire :

$$ {}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z_o}M = a\,(Z-Z_o)^2 \qquad \text{(c)} $$

b) L'énergie disponible pour une désintégration β^- à partir du noyau (A, Z) s'écrit :

$$ Q_{\beta^-} = \left({}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z+1}M\right)c^2 \qquad \text{(d)} $$

soit en utilisant la relation (c) :

$$ Q_{\beta^-} = \left[a\,(Z-Z_o)^2 - a\,(Z+1-Z_o)^2\right]c^2 = 2\,a\,c^2\left(Z_o - Z - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(e)} $$

L'émission β^- n'est énergétiquement possible que si Q_{β^-} est positif, ce qui entraîne :

$$ Z \leqslant Z_o - \frac{1}{2} \qquad \text{(f)} $$

c) APPLICATION NUMÉRIQUE :

$$ Z = 52 \qquad Q_{\beta^-} = 2\,ac^2\,(Z_o - 52{,}5) = 2{,}28 \text{ MeV} $$
$$ Z = 53 \qquad Q_{\beta^-} = 2\,ac^2\,(Z_o - 53{,}5) = 0{,}97 \text{ MeV} $$

La résolution de ce système conduit à :

$$ac^2 = 0{,}655 \text{ MeV} \qquad \text{et} \qquad Z_o = 54{,}2$$

Remarque : L'isobare stable (unique) avec A = 131 est ${}^{131}_{54}\mathrm{Xe}$: c'est le noyau le plus près du creux de la parabole.

d) Les noyaux stables de A impair se trouvent au voisinage des minima des paraboles de masse.

En écrivant :

$$\left(\frac{\partial\,({}^{A}_{Z}M)}{\partial Z}\right)_{A=\mathrm{ct}} = 0 \qquad \text{(g)}$$

on obtient la relation suivante :

$$M_n - M_H + a_a = 2\left(\frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{a_a}{A}\right) Z$$

soit

$$(M_n - M_H)\,c^2 + a_a c^2 = 2\left(\frac{a_c c^2}{A^{1/3}} + \frac{a_a c^2}{A}\right) Z \qquad \text{(h)}$$

et numériquement :

$$\frac{A}{Z} = 1{,}98 + 0{,}015\,A^{2/3} \qquad \text{(i)}$$

Faisant A = 230 (noyau lourd) dans cette expression on obtient $Z \simeq 90$ d'où l'on déduit le rapport $N/Z \simeq 1{,}55$.

4° Quelle loi de conservation conduit à introduire un antineutrino plutôt qu'un neutrino dans la désintégration β^- ?

RÉPONSE. — Conservation du nombre leptonique.

On rappelle que β^- et ν sont des leptons (nombre leptonique + 1) tandis que β^+ et $\bar{\nu}$ sont des antileptons (nombre leptonique − 1).

18

RÉACTIONS NUCLÉAIRES A BASSE ÉNERGIE NOYAU COMPOSÉ

On considère le noyau composé ${}^{28}_{14}\mathrm{Si}$ et les différents modes de formation et de décomposition suivants :

$$\begin{array}{llcll}
\text{(I)} & {}^{4}_{2}\alpha + {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} \searrow & & \nearrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\alpha & \text{(I)} \\
\text{(II)} & {}^{1}_{0}n + {}^{27}_{14}\mathrm{Si} \longrightarrow & ({}^{28}_{14}\mathrm{Si})^{*} & \longrightarrow {}^{27}_{14}\mathrm{Si} + {}^{1}_{0}n & \text{(II)} \\
\text{(III)} & {}^{1}_{1}p + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \nearrow & & \searrow {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{1}_{1}p & \text{(III)}
\end{array}$$

et nous écrirons de façon générale :

$$a + A \rightarrow (C)^{*} \rightarrow B + b$$

1° Donner le spin et la parité du noyau composé selon qu'il est formé suivant les modes (I), (II) *ou* (III), *la capture de la particule légère incidente étant effectuée dans l'onde* S (l = 0) *ou dans l'onde* P (l = 1).

On donne le spin J *et la parité* P *des noyaux suivants, dans l'état fondamental et dans la notation* $(J)^P$:

Noyau	${}^{1}_{0}n$	${}^{1}_{1}p$	${}^{4}_{2}\alpha$	${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$	${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$	${}^{27}_{14}\mathrm{Si}$
$(J)^P$	$\left(\frac{1}{2}\right)^+$	$\left(\frac{1}{2}\right)^+$	$(0)^+$	$(0)^+$	$\left(\frac{5}{2}\right)^+$	$\left(\frac{5}{2}\right)^+$

2° En considérant la réaction

$${}^{1}_{0}n + {}^{24}_{14}\mathrm{Si} \rightarrow ({}^{28}_{14}\mathrm{Si})^{*} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\alpha$$

préciser les valeurs possibles pour le moment angulaire orbital de la voie de sortie, le neutron incident étant supposé capté dans l'onde S *et le noyau de Magnésium produit dans son état fondamental.*

3° On considère le noyau composé C *formé à partir de la voie d'entrée* a + A. *Etablir l'expression de l'énergie d'excitation,* W_{ex}, *de ce noyau composé en fonction des masses des particules de la voie d'entrée et de l'énergie cinétique* T_a *de la particule incidente exprimée dans le laboratoire. Le noyau cible sera supposé au repos dans le laboratoire.*